Теорія ймовірностей

Група 131

13.03.2020 р., 27.03.2020 р.

Викладач Котова О.В.

Тема: Елементи комбінаторики

Короткі теоретичні відомості

Правило додавання. Нехай дві несумісні дії можуть бути виконані відповідно m_1 та m_2 способами. Тоді якусь одну з цих дій можна виконати m_1+m_2 способами.

Правило множення. Нехай дві здійснювані одна за одною дії можуть бути виконані відповідно m_1 та m_2 способами. Тоді обидві вони можуть бути виконані $m_1 \cdot m_2$ способами (рис.1.).

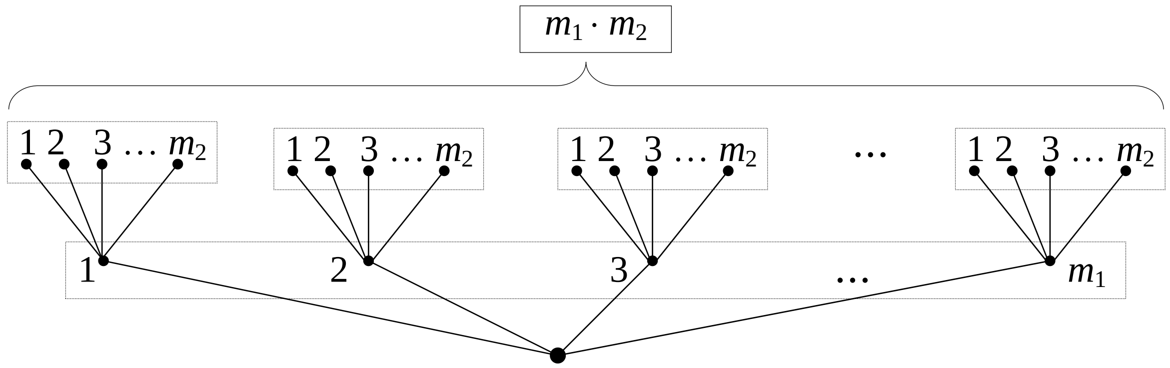

Рис.1.

Обидва правила узагальнюються на випадок будь-якої скінченої кількості дій.

Приклад 1. Для складання номера підрозділу використовуються цифри 1, 2, 3, 4. Скільки підрозділів можна пронумерувати, якщо один номер повинен складатися не більше, ніж з трьох цифр?

Розв'язання. а) Цифри у номері не повторюються. Для складання тризначного номера потрібно виконати послідовно одну за іншою три дії – вибір першої, другої та третьої цифр. Ці вибори можна здійснити відповідно 4, 3 та 2 способами. Отже, на підставі правила множення, тризначних номерів буде $N_3=4\cdot3\cdot2=24$. Аналогічним чином знаходимо кількість двозначних $N_2=4\cdot3=12$ та однозначних номерів $N_1=4$. Тепер за правилом додавання знаходимо загальну кількість підрозділів, які можна занумерувати $N= =N_1+N_2+N_3=40$.

б) Цифри у номері можуть повторюватись. Вибір будь-якої цифри можна здійснити 4 способами. Тому $N=N_1+N_2+N_3=4\cdot 4\cdot 4+4\cdot 4+4=84$.

Нехай задана множина із n різних елементів.

Сукупність k ($k \le n$) із цих елементів, розташованих у певному порядку (упорядкована підмножина), називається ***розміщенням*** із n елементів по k. Різні розміщення відрізняються одне від іншого порядком чи складом елементів. Наприклад, у множини $\{a,b,c\}$ із трьох елементів розміщеннями по два елементи є упорядковані підмножини (a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b). Кількість таких розміщень позначають A_n^k. Застосовуючи правило множення, одержимо $A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$.

Розміщення із n елементів по n називаються ***перестановками***. Різні перестановки відрізняються одна від іншої лише порядком елементів. Наприклад, перестановками у множини $\{a,b,c\}$ із трьох елементів будуть упорядковані підмножини (a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a). Кількість перестановок дорівнює $A_n^n = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$.

Добуток цілих чисел від 1 до n прийнято позначати $n!$ (n–факторіал). Тоді $A_n^n=n!$, $A_n^k=n!/(n-k)!$ (за означенням $0!=1$).

Набір k ($k \le n$) із заданих n елементів називається ***сполученням*** (комбінацією) із n елементів по k. Різні комбінації відрізняються одна від іншої хоча б одним елементом. Наприклад, у множини $\{a,b,c\}$ із трьох елементів сполученнями по два елементи є підмножини $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$. Кількість таких комбінацій позначають C_n^k. Оскільки $A_n^k=C_n^k\cdot k!$, то $C_n^k= n!/(n-k)!\cdot k!$. Справедливі такі співвідношення:

$$C_n^k = C_n^{n-k},\quad C_n^n = C_n^0 = 1,\quad C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n,\quad C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

<u>Приклад 2</u>. Скільки є чотиризначних чисел (числа можуть починатись з нуля), у яких: а) дві цифри однакові; б) три цифри однакові; в) дві цифри повторюються

двічі; г) хоча б дві цифри збігаються?

<u>*Розв'язання*</u>. а) Вибір цифр, які збігаються, (перша дія) можна виконати 10 способами, а їх розташування у числі (друга дія) – C_4^2 способами. Одержимо "числа" у вигляді •11•, де кружок "•" позначає місця цифр, що не збігаються. Вибір цифри замість правого кружка (третя дія) можна виконати 9 способами, а замість лівого (четверта дія) – 8 способами. На підставі правила множення робимо висновок, що поставленій умові задовольняють $10\cdot C_4^2\cdot 9\cdot 8=4320$ чисел. Другий спосіб розв'язку: набір із трьох цифр (перша дія) виконується C_4^3 способами; вибір цифри, що збігається, (друга дія) виконується 3 способами; розміщення одержаних 4 цифр (наприклад, 1,5,1,8) на чотирьох місцях виконується 4!/2! способами (третя дія), всього маємо $C_4^3\cdot 3\cdot 4!/2!=4320$ варіантів.

б) Вибір трьох цифр, які збігаються, виконується 10 способами, а їх розташування C_4^3 способами. Вибір цифри, яка не збігається, виконується 9 способами. Всього одержуємо $10\cdot C_4^3\cdot 9=360$ варіантів. (Другий спосіб: $C_4^2\cdot 2\cdot 4!/3!=360$).

в) Вибір пари цифр відбувається C_{10}^2 способами; розстановка на чотирьох місцях двох пар цифр, що збігаються, може бути виконана $4!/2!\cdot 2!$ способами; одержуємо $C_{10}^2\cdot 6=270$ варіантів.

г) Маємо 10 чисел, в яких усі 4 цифри збігаються. Поставленій умові з урахуванням результатів пунктів а), б), в) задовольняє 4320+360+270+10=4960 чисел.

<u>*Приклад 3*</u>. Колода із 52 карт ретельно перетасована. Кожен із гравців одержує по п'ять карт. Знайти ймовірність того, що гравцеві будуть здані: а) карти одної масті і послідовних достоїнств (наприклад, сімка, вісімка, дев'ятка, десятка і валет черв), така комбінація називається флеш ройалем; б) чотири карти одного достоїнства (наприклад, чотири дами) і будь-яка інша карта, така комбінація називається покером.

<u>*Розв'язання.*</u> Оскільки порядок одержання гравцем карт не грає ролі, то

кількість N різних варіантів роздачі йому карт дорівнює C_{52}^{5}. а) У кожній масті є 9 можливих варіантів вибору, а оскільки мастей 4, то по принципу множення кількість M сприятливих результатів роздачі дорівнює 9·4=36. Таким чином, ймовірність одержання гравцем флеш ройала дорівнює $\frac{36}{C_{52}^{5}} =$

$\frac{36 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = 0.000014$.

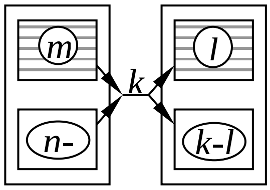

Рис. 2.

б) Чотири карти одного достоїнства можна вибрати 13 способами, а п'яту – 48 способами. Тому кількість M сприятливих результатів роздачі дорівнює 13·48 і, таким чином, ймовірність одержання гравцем покеру дорівнює $\frac{13 \cdot 48}{C_{52}^{5}} = \frac{13 \cdot 48 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = 0.00024$.

Приклад 4. З n деталей, серед яких m мають дефект, беремо k деталей. Знайти ймовірність того, що серед них буде l дефектних деталей (рис.2).

Розв'язання. Нехай подія A означає, що взято l дефектних деталей. Оскільки порядок вибору деталей не має значення, то число способів N взяти k деталей із n дорівнює $N = C_n^k$. Кількість способів M, якими можна взяти заданий набір деталей, дорівнює на підставі правила множення добутку кількості способів взяти l деталей із m (C_m^l) на кількість способів взяти k-l стандартних деталей із n-m (C_{n-m}^{k-l}):

$$M = C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l} .$$

Таким чином, на підставі формули (1) одержуємо

$$P(A) = \frac{C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l}}{C_n^k} . \qquad (2)$$

Приклад 5. Електронний пристрій складається із двох блоків, в кожному з яких по 5 однакових мікросхем. Пристрій функціонує, якщо в кожному з блоків працюють не менше двох мікросхем. Яка ймовірність того, що при відмові чотирьох мікросхем пристрій буде функціонувати.

<u>*Розв’язання.*</u> Нехай подія A означає функціонування пристрою при вказаних умовах. Скористаємося тим же методом, що і при розв’язку попереднього прикладу: n=10 (загальна кількість мікросхем), m=4 (кількість бракованих мікросхем), k=5 (кількість мікросхем, які використані в першому блоці), l =1, або 2, або 3 (кількість бракованих мікросхем серед використаних у першому блоці) (рис. 3.). Загальна кількість способів сформувати блоки $N = C_{10}^5$, а кількість способів, сприятливих функціонуванню прикладу $M = C_4^2 \cdot C_6^3 + C_4^3 \cdot C_6^2 + C_4^1 \cdot C_6^4$ (ми скористались правилом додавання). Таким чином,

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{20}{21}.$$

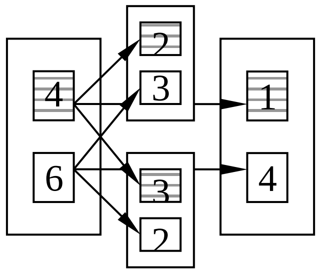

Рис. 3.

Другий спосіб розв’язку. Кількість варіантів, при яких перший блок виходить із ладу, дорівнює $C_4^4 \cdot C_6^1 = 6$. Отже, кількість варіантів, при яких прилад не буде функціонувати, дорівнює 12. Тому

$$P(\overline{A}) = \frac{12}{C_{10}^5} = \frac{12 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{21}$$

і, таким чином, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \dfrac{20}{21}$.

Завдання для самостійного розв'язування

Група А

1. Обчисліть: а) 10! - 1!; б) $\frac{6!-5!}{120}$; в) $\frac{12!\cdot 43!\cdot 85!}{10!\cdot 41!\cdot 86!}$; г) $\frac{31!\cdot 42!\cdot 62!\cdot 7!}{30!\cdot 41!\cdot 63!\cdot 6!}$; д) $\frac{35!\cdot 113!\cdot 225!}{110!\cdot 226!\cdot 37!}$

(а)3628799; б) 5; в) 2772;г) $\frac{434}{3}$ *;d)* $\frac{14}{3}$ *)*

2. Перетворіть вираз, використовуючи поняття факторіала: а) $\frac{(m+3)!}{m!}$; б)

Група Б

1. У їдальні є 4 перших страви, 5 других і 3 третіх. Скількома способами можна вибрати обід із трьох страв, щоб були перша, друга і третя страви? ($C_4^1 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1 = 60$.)
2. Скількома способами можна поставити на чорні поля шахової дошки 12 білих та 12 чорних шашок? ($C_{32}^{12} \cdot C_{20}^{12}$.)
3. Скількома способами можна поділити клас із 20 учнів на дві групи так, щоб: а) в одній групі було 8 учнів, а в іншій – 12; б) у кожній із двох груп було по 10 учнів? (а) C_{20}^8; б) $\frac{1}{2}C_{20}^{10}$.)
4. Серед 25 учнів класу, в якому 10 дівчат, розігрують 5 квитків на концерт. Скільки є способів виграшу цих квитків 2 дівчатами і 3 хлопцями? ($C_{10}^2 \cdot C_{15}^3$.)
5. Чемпіонат, у якому беруть участь 16 команд, проводиться у два кола. Визначити, яку кількість зустрічей потрібно провести? ($2C_{16}^2$.)
6. Є 10 тюльпанів, 25 білих нарцисів та 15 жовтих нарцисів. Скількома способами можна скласти букет з 5 тюльпанів, 2 білих та 2 жовтих нарцисів? ($C_{10}^5 \cdot C_{25}^2 \cdot C_{15}^2$.)
7. Із цифр 1, 2, 3, 4, 5 складають різні трицифрові та чотирицифрові числа. Скільки таких чисел можна скласти, якщо цифри у числах не повторюються? ($A_5^3 + A_5^4 = 180$.)
8. У гості до двох дівчат прийшли три однокласники. У дівчат є 6 різних чашок, 7 однакових тарілок і 6 різних ложок. Скількома способами можна накрити стіл для чаювання? ($A_6^5 \cdot A_6^5 = (A_6^5)^2$)
9. Скількома способами дві особи можуть сісти на будь-які 2 з 10 стільців, розставлених у ряд? Скількома способами ці дві особи можуть сісти поруч? Скількома способами вони можуть сісти, щоб між ними було принаймні одне незайняте місце? ($A_{10}^2 = 90$; $(9 \cdot 2) = 18$; $(90 - 18) = 72$.)
10. Складені розміщення з 10 елементів по 7 елементів. Скільки з цих розміщень: а) міститимуть заданий перший елемент; б) не міститимуть заданий перший елемент? (а) $7 \cdot A_9^6$; б) $A_{10}^7 - 7 \cdot A_9^6 = 3A_9^6$)
11. Скільки парних п'ятицифрових чисел можна утворити цифрами 2, 3, 4, 5, 9? ($2P_4 = 48$.)
12. У чемпіонаті України з футболу у вищій лізі грають 18 команд. Скількома способами можуть розділитись місця, зайняті командами, якщо відомо, що команди «Динамо», «Дніпро», «Шахтар», «Чорноморець» і «Таврія» займуть перші п'ять місць? ($P_5 \cdot P_{13}$.)
13. 10 учням видаються два варіанти завдань контрольної роботи. Скількома способами можна посадити учнів порівну в два ряди, щоб у тих учнів, що сидять поруч, не було однакових варіантів, а у тих, що сидять один за одним, був один і той же? ($2 \cdot (P_5)^2 \cdot C_{10}^5$.)
14. В автомобілі є 7 місць, включаючи місце водія. Скількома способами 7 осіб можуть сісти в автомобіль, якщо місце водія можуть зайняти лише певні три з них? ($C_3^1 \cdot P_6$.)

Група В

15. Скількома способами із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, можна утвориш шестицифрові числа з різних цифр, в яких є цифри 1, 2, 3? ($C_6^3 \cdot P_3$)

16. Скільки шестицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, ..., 9, якщо кожне число повинно складатися з трьох непарних та трьох парних цифр, причому жодна із цифр у ньому не повторюється? ($C_5^3 \cdot C_4^3 \cdot P_6$.)

17. На конкурс на заміщення вакансій у компанію прислали анкети 10 бухгалтерів та 8 менеджерів. Скількома способами можна прийняти на роботу трьох спеціалістів, якою серед них повинен бути хоча б один бухгалтер і хоча б один менеджер? ($+ C_{10}^1 \cdot C_8^2$.)

18. Будівельна організація виділила на допомогу підшефному дитячому будинку бригаду з 5 робітників. В організації працюють 20 робітників, у тому числі 5 мулярів, 4 теслярі та 2 штукатури. Скількома способами можна укомплектувати бригаду, щоб вона складалася з робітників усіх цих спеціальностей по одному? ($C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_2^1 \cdot C_9^2$.)

19. Скільки всіх дільників мас число 210? ($210=2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$; $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 + 1 = 16$.)

20. На іспиті задається 10 питань, з яких 3 питання з математики. Скількома способами можна поставити ці 10 питань так, щоб 3 питання з математики не були поряд? ($P_{10} - P_3 \cdot P_7$.)

21. Із 3 інженерів і 9 економістів повинна бути складена комісія із 7 осіб. Скількома способами можна створити таку комісію, якщо в неї повинен входити хоча б один інженер? ($C_3^1 \cdot C_9^6 + C_3^2 \cdot C_9^5 + C_3^3 \cdot C_9^4$.)

22. Із 10 спортсменів, серед яких 2 велосипедисти, 3 плавці, а інші – бігуни, потрібно створити команду, в яку б увійшли не менше одного спортсмена з кожного виду спорту. Скількома способами це можна зробити, якщо в команді повинно бути 6 спортсменів? ($C_2^1 C_3^1 C_5^4 + C_2^1 C_3^2 C_5^3 + C_2^1 C_3^3 C_5^2 + C_2^2 C_3^1 C_5^3 + C_2^2 C_3^2 C_5^2 + C_2^2 C_3^3 C_5^1 = 175$.)

23. Із 10 різних троянд і 8 різних жоржин потрібно так скласти букет, щоб у ньому було не менше 8 троянд і 7 жоржин. Скількома способами можна скласти такий букет? ($(C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10}) \cdot (C_8^7 + C_8^8$.)

24. Дано дві паралельних прямі. На одній прямій вибрано 6 точок, а на іншій – 8 точок. Скільки існує різних трикутників з вершинами в цих точках? ($C_6^2 \cdot C_8^1 + C_8^2 \cdot C_6^1$)

25. Пасажирський потяг складається з 2 багажних, 5 плацкартних і 4 купейних вагонів. Скількома способами можна сформувати потяг, щоб купейні вагони не були крайніми? ($2 \cdot P_2 \cdot P_4 \cdot P_5$.)

26. Серед чотирьох гравців у доміно розподіляють порівну 28 кісток. Скількома способами можна розділити кістки доміно? ($C_{28}^7 C_{21}^7 C_{14}^7 C_7^7$.)

27. У чемпіонаті країни з футболу у вищій лізі беруть участь 18 команд. Під підсумком чемпіонату розуміють визначення трійки призерів (золоті, срібні, бронзові нагороди) та двох аутсайдерів (залишають вищу лігу). Скільки існує різних варіантів стосовно підсумку чемпіонату з футболу у вищій лізі? ($A_{18}^3 \cdot C_{15}^2$.)

28. Скільки існує варіантів опитування 11 учнів на одному уроці, якщо жоден з них не буде опитаний двічі, і на уроці може бути опитана будь-яка кількість присутніх учнів, причому порядок, у якому опитують учнів, не має значення? ($C_{11}^0 + C_{11}^1 + ... + C_{11}^{11} = 2048$ або $2^{11} = 2048$.)